

一対比較におけるループの解消や
緩和な整合性制約を満たすためのアルゴリズム
– 不整合な一対比較の指摘と
一対比較値の範囲制限 –

高萩栄一郎

専修大学 商学部

2011年6月12日 日本経営数学会

- ▶ 一対比較
 - ▶ n 項目 $\rightarrow n - 1$ 回の一対比較 (比率尺度)
 - \rightarrow 重要度の推定可能
 - ▶ 項目間のすべての組について比較
 - ▶ 「ことば」による 17 段階の回答
 - ▶ \rightarrow 精度の向上
- ▶ ループ (推移性の欠如)
 - ▶ $A \succ B$ かつ $B \succ C$ のとき, $C \succ A$
- ▶ 緩和な整合性制約
 - ▶ 言葉の程度を含めた 推移性
 - ▶ 『「かなり」(一対比較値 5) で $A \succ B$ 』 かつ
『「うんと」(一対比較値 7) で $B \succ C$ 』 のとき,
『 $A \succ C$ は、「うんと」(一対比較値 7) 以上』
とならなくてはならない.
- ▶ この 2 つを満たすことにより, より正確な一対比較

- ▶ 次の点を考慮した AHP の一対比較の WEB サイトを作成
 - ▶ ループが存在しないように
 - ▶ 緩和な整合性制約を満たすように
 - ▶ 理想点・満足点を考慮（今回の発表では省略）
- ▶ 目標
 - ▶ 正確な一対比較
 - ▶ 一対比較の困難さの低減
 - ▶ 一対比較回数の低減は目標としない
 - ▶ 正確 → ループが存在しない，緩和な整合性制約を満たす
 - ▶ 比較的大きな一対比較も可能にする．
- ▶ 「同じくらい重要」 → 扱いが難しい
- ▶ 作成したシステム
<http://cgi.isc.senshu-u.ac.jp/%7ethc0456/AHPnewPC/>
 - ▶ ループをチェック
 - ▶ ループと緩和な整合性制約をチェック
 - ▶ 順序を指定して，緩和な整合性制約を満たす範囲で一対比較

ループのチェック

	A	B	C	D	E
A	1	3	4	5	6
B		1	3	$\frac{1}{3}$	5
C			1	5	3
D				1	3
E					1

2項関係の定義

$$x_i \succ x_j \text{ if } a_{ij} > 1$$

$$x_i \prec x_j \text{ if } a_{ij} < 1$$

$$x_i \sim x_j \text{ if } a_{ij} = 1$$

$A \succ B, A \succ C, A \succ D, A \succ E, B \succ C, B \prec D, B \succ E, C \succ D,$
 $C \succ E, D \succ E$

整理すると： $A \succ (B, C, D) \succ E$

(B, C, D) 間はループ： $B \succ C, B \prec D, C \succ D$

一部の一対比較のやり直し

B,C,D 間の一対比較をやり直す.

	A	B	C	D	E
A	1	3	4	5	6
B		1	3 → 3	$\frac{1}{3}$ → 3	5
C			1	5 → 1	3
D				1	3
E					1

修正前 $A \succ (B, C, D) \succ E$, (B, C, D) 間はループ :

$B \succ C, B \prec D, C \succ D$

修正後 $A \succ B \succ C \sim D \succ E$

- ▶ \succeq に関して，全順序関係を満たすようにする
(推移律を満たすように一対比較をやり直す)
- ▶ \sim に関して，同値関係とする．

2項関係の解釈

- ▶ $A \succ B \rightarrow A \succeq B$ かつ $A \not\preceq B$
- ▶ $a_{AB} = 1(A \sim B)$ 「同じくらい重要」 $\rightarrow a_{AB} \simeq 1$
 $a_{AB} > 1$ や $a_{AB} < 1$ も他の状況によりあり得る
次の3つの関係のどれかを仮定
 - ▶ $A \succeq B$ かつ $A \not\preceq B$: ($A \succ B$ を仮定)
 - ▶ $A \not\preceq B$ かつ $A \preceq B$: ($A \prec B$ を仮定)
 - ▶ $A \succeq B$ かつ $A \preceq B$: (本来の $A \sim B$)

つじつまが合うように変更(解釈)

全順序関係は，少なくとも $A \succeq B$ か $A \preceq B$ のどちらかが成立し，

反射性 $A \succeq A$

反対称性 $A \succeq B$ かつ $A \preceq B$ ならば $A \sim B$

推移性 $A \succeq B$ かつ $B \succeq C$ ならば $A \succeq C$

が成立することを言う

- ▶ (1) $A \succ B, B \succ C$ かつ $C \succ A$
 - ▶ $\{A, B, C\}$ をループが存在する要素の集合とする .
 - ▶ もし, A, B, C のどれかが, 他のループが存在する要素の集合に含まれていたら, その集合と結合する .
- ▶ (2) $A \succ B, B \succ C$ かつ $A \sim C$
 - ▶ $A \succ C$ を仮定 ($A \preceq C$ を除外する)
- ▶ (3) $A \succ C, A \sim B$ かつ $B \sim C$
 - ▶ $A \succ B$ と $B \succ C$ を仮定 ($A \preceq B$ と $B \preceq C$ を除外する)
- ▶ (2),(3) のように何かを仮定した場合, ループのチェックをすべてのパターンについてやり直す .
- ▶ (1) で指摘したループを含む要素間の一対比較をやり直す .

ループの例

順位表

順位	ループの有無	項目名(番号)
1		A(1)
2	X	B(2), C(3), D(4)
3		E(5)

一対比較でループを起こしています。

順番にループを起こしている箇所の一対比較をやり直します。

	左の項目が圧倒的に重要	左の項目がうんと重要	左の項目がかなり重要	左の項目が少し重要	左右同じくらい重要	右の項目が少し重要	右の項目がかなり重要	右の項目がうんと重要	右の項目が圧倒的に重要	
B	○	○	○	○	○	●	○	○	○	C
B	○	○	○	○	○	○	○	○	○	D
C	○	○	○	●	○	○	○	○	○	D

送信

緩和な整合性制約

- ▶ 緩和な整合性制約: $A \succ B \succ C$ ($a_{AB} > 1, a_{BC} > 1$) のとき,

$$a_{AC} \geq \max(a_{AB}, a_{BC})$$

を満たしていること. ($a_{AC} \geq 1$ は, 要素 A と C の一対比較値)

- ▶ 前提

- ▶ ループは存在しないこと
- ▶ \succeq に関して全順序
- ▶ \sim に関して同値関係

→ (重複のない) 順序付きの同値類

- ▶ アルゴリズム
- ▶ 順位の離れた順に A, C を取り出し.
- ▶ その間の B について, $a_{AB} \leq a_{AC}, a_{BC} \leq a_{AC}$ となるようにしていく.

緩和な整合性制約を満たすようにするアルゴリズム

- Step 1: 同順位の要素を集合にまとめる .
- Step 2: 順位差の大きい 2 つの集合から順に , Step 3 から Step 5 を実行する . すべてのパターンが終了したらアルゴリズムを終了
- Step 3: Step 2 の 2 つの集合の要素間で , 最小の一对比較値を求める .
- Step 4: Step 2 の高順位の要素 A, 低順位の要素 C について , すべての高順位と低順位の間要素 B について , a_{AB}, a_{BC} が Step 3 の最小の一对比較以下になっているか確認する .
条件を満たしていれば Step 2 の次のパターンへ
条件を満たしていなければ , Step 5 へ
- Step 5: 修正できる範囲を示し , 修正の一对比較を行う

例題（緩和な整合性制約）

	A	B	C	D	E	F
A	1	5	4	7	9	8
B		1	5	4	1	3
C			1	5	5	2
D				1	1	5
E					1	7
F						1

- ▶ ループは存在しない（チェック済み）
- ▶ 順位： A \succ B \succ C \succ D ~ E \succ F
1位 2位 3位 4位 5位
- ▶ BとEの対比較値は1であるが， $B \succ E$ が仮定されている．

例題 , A,E,F の関係

	A	B	C	D	E	F
A	1	5	4	7	9	8
B		1	5	4	1	3
C			1	5	5	2
D				1	1	5
E					1	7
F						1

- ▶ 順位 A \succ B \succ C \succ D ~ E \succ F
1位 2位 3位 4位 5位
- ▶ $a_{AE} \leq a_{AF}$ でなくてはならないに , $a_{AE} = 9$, $a_{AF} = 8$
- ▶ 変更のオプション
 - ▶ a_{AE} を 8 以下
 - ▶ a_{AF} を 9 以上

例題 , A,E,F の関係, 一対比較のやり直し

	左の項目が圧倒的に重要		左の項目がうんと重要		左の項目がかなり重要		左の項目が少し重要		左右同じくらい重要		右の項目が少し重要		右の項目がかなり重要		右の項目がうんと重要		右の項目が圧倒的に重要	
[A]	●	○	○	○	○	○	○	○	○									[E]
E	○	○	●	○	○	○	○	○	○									F
A	○	●	○	○	●	○	●	○	●									F

- ▶ 赤: 変更禁止エリア .
- ▶ 白: 変更可能エリア .
- ▶ 黄: 3 行目を変更した場合設定可能エリア
- ▶ 変更のオプション , a_{AE} を 8 以下または a_{AE} を 9
- ▶ 例 : a_{AE} を 9 → 8

この画面

例題, B,C,F の関係

	A	B	C	D	E	F
A	1	5	4	7	8	8
B		1	5	4	1	3
C			1	5	5	2
D				1	1	5
E					1	7
F						1

- ▶ 順位 A \succ B \succ C \succ D ~ E \succ F
1位 2位 3位 4位 5位
- ▶ $a_{BC} \leq a_{BF}$ でなくてはならないに, $a_{BC} = 5, a_{BF} = 3$
- ▶ $a_{BF} \leq a_{AF}$ より, a_{BF} は, 8 以下
- ▶ 変更のオプション
 - ▶ a_{BC} を 3 以下
 - ▶ a_{BF} を 5 以上 8 以下

例題 , B,C,F の関係, 一対比較のやり直し

	左の項目が圧倒的に重要		左の項目がうんと重要		左の項目がかなり重要		左の項目が少し重要		左右同じくらい重要		右の項目が少し重要		右の項目がかなり重要		右の項目がうんと重要		右の項目が圧倒的に重要	
[B]	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	[C]
C	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	F
B	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	F

- ▶ $a_{BC} \leq a_{BF}$ でなくてはならないに , $a_{BC} = 5$, $a_{BF} = 3$
- ▶ $a_{BF} \leq a_{AF}$ より , a_{BF} は , 8 以下
- ▶ 変更のオプション
 - ▶ a_{BC} を 3 以下
 - ▶ a_{BF} を 5 以上 8 以下
- ▶ 例 : a_{BF} を 3 \rightarrow 5

例題 , B,C,E の関係, 一対比較のやり直し

	左の項目が圧倒的に重要	左の項目がうんと重要	左の項目がかなり重要	左の項目が少し重要	左右同じくらい重要	右の項目が少し重要	右の項目がかなり重要	右の項目がうんと重要	右の項目が圧倒的に重要
[B]			●	○	○	○			[C]
[C]			●	○	○	○			[E]
B			○	○	○	○	⊗		E

- ▶ $a_{BC} \leq a_{BE}$ でなくてはならないに , $a_{BC} = 5, a_{BE} = 1$
- ▶ $a_{CE} \leq a_{BE}$ でなくてはならないに , $a_{CE} = 5, a_{BE} = 1$
- ▶ $a_{BF} \leq a_{BF}(=5)$ より , a_{BE} は , 5 以下
- ▶ 変更のオプション
 - ▶ a_{BC} と a_{CE} を 1
 - ▶ a_{BE} を 5
- ▶ 例 : a_{BE} を $1 \rightarrow 3, a_{BC}$ を $5 \rightarrow 3, a_{CS}$ を $5 \rightarrow 3,$

例題，緩和な整合性制約を満たした一対比較表

	A	B	C	D	E	F
A	1	5	4 → 5	7	9 → 8	8
B		1	5 → 3	4	1 → 3	3 → 5
C			1	5 → 2	5 → 3	2 → 3
D				1	1	5 → 2
E					1	7 → 3
F						1

順位 A 1位 > B 2位 > C 3位 > D ~ E 4位 > F 5位

ウエイト，C.I. の比較

	A	B	C	D	E	F	C.I.
修正前	0.4705	0.1956	0.1493	0.0620	0.0885	0.0342	0.3087
修正後	0.5266	0.1999	0.1123	0.0602	0.0642	0.0368	0.0599

順序を指定して，緩和な整合性制約を満たす一対比較

- ▶ 最初に順序を指定し，
- ▶ 順序に従った，緩和な整合性制約を満たした一対比較値の範囲のみで一対比較を行う．
- ▶ 一対比較の順番は，順序の差異が大きい順

順序の指定

順位の入力(同順位可)

項目名	順位
A	1
B	2
C	2
D	3
E	4
F	5

A 1位 γ B ~ C 2位 γ D 3位 γ E 4位 γ F 5位

もっとの離れた一対比較

	左の項目が圧倒的に重要		左の項目がうんと重要		左の項目がかなり重要		左の項目が少し重要		左右同じくらい重要		右の項目が少し重要		右の項目がかなり重要		右の項目がうんと重要		右の項目が圧倒的に重要	
A	○	○	○	○	○	○	○	○	○									F

A > B ~ C > D > E > F
1位 2位 3位 4位 5位

- ▶ 1回目：もっとも離れた順位 (順位差 4) の一対比較
- ▶ まだ、他の一対比較が行われたいないので、すべての範囲
- ▶ 例： $a_{AF} = 8$

順位差3の一对比較

	左の項目が圧倒的に重要		左の項目がうんと重要		左の項目がかなり重要		左の項目が少し重要		左右同じくらい重要		右の項目が少し重要		右の項目がかなり重要		右の項目がうんと重要		右の項目が圧倒的に重要	
A		○	○	○	○	○	○	○	○									E
B		○	○	○	○	○	○	○	○									F
C		○	○	○	○	○	○	○	○									F

A > B ~ C > D > E > F
 1位 2位 3位 4位 5位

- ▶ 2回目：順位差3 (1位と4位), (2位と5位)
- ▶ $a_{AF} = 8$ より, 8以下に抑えられる.
- ▶ 例: $a_{AE} = 7, a_{BF} = 6, a_{CF} = 5$

順位差 1 の一対比較

	左の項目が圧倒的に重要	左の項目がうんと重要	左の項目がかなり重要	左の項目が少し重要	左右同じくらい重要	右の項目が少し重要	右の項目がかなり重要	右の項目がうんと重要	右の項目が圧倒的に重要
A			○	○	○	○	○		
A			○	○	○	○			
B					○	○	○		
C					○	○	○		
D						○	○		
E						○	○		

A 1位 > B~C 2位 > D 3位 > E 4位 > F 5位

- ▶ 4 回目：順位差 1 (1 位と 2 位), (2 位と 3 位), (3 位と 4 位), (4 位と 5 位)
- ▶ a_{AB}, a_{AC} は, $a_{AD} = 6$ より, 6 以下に制限される.
- ▶ a_{BD}, a_{CD} は, $a_{CE} = 3$ より, 3 以下に制限される.
- ▶ a_{DE}, a_{EF} は, $a_{DF} = 2$ より, 2 以下に制限される.
- ▶ 例: $a_{AB} = 5, a_{AC} = 4, a_{BD} = 2, a_{CD} = 1, a_{DF} = 1, a_{EF} = 2$

順序を指定して、緩和な整合性制約を満たす一対比較 最終結果

	A	B	C	D	E	F
A	1	5	4	6	7	8
B		1	1	2	7	6
C			1	1	3	5
D				1	1	2
E					1	2
F						1

▶ $B \sim C$ より, $a_{BC} = 1$ (自動設定)

A	B	C	D	E	F	C.I.
0.5056	0.1682	0.1428	0.0852	0.0613	0.0369	0.0473

C.I.(整合度, consistency index)

- ▶ C.I. は, 現在 AHP でもっともよく使われている指標である.
- ▶ A を一対比較値 a_{ij} からなる $n \times n$ 行列とし, A の最大固有値を λ_{\max} とし,

$$C.I. = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

- ▶ 完全に整合的であるとき 0 で, 値が高くなるにつれ, 不整合になるとされている.
経験的な値として, 0.1 もしくは 0.15 以上のとき, 不整合の度合いが高い
- ▶ ランダム整合度 R.I., 整合比 C.R.
 - ▶ n が大きくなるにつれ, この C.I. が大きくなる傾向があるとして, 乱数で定めた一対比較行列による C.I. の値を基に, n により異なるランダム整合度 R.I. を求めている. C.I. と R.I. の比,
 - ▶ 整合比 C.R.

$$C.R. = \frac{C.I.}{R.I.}$$

- ▶ 一対比較行列全体をみて, 整合的かどうか指摘している. ☰

整合性を悪化させている一対比較の指摘

▶ 刀根の方法

- ▶ 整合的な一対比較行列を固有値法で求めたウエイトから求める (B の C.I. は 0)

$$b_{ij} = w_i / w_j$$

- ▶ b_{ij} と a_{ij} の値を比較
- ▶ 差異が大きい一対比較値をやり直しの対象

▶ 中島の方法

1. 一対比較行列 A のうち, 1 つの要素 $a_{ij} (i > j)$ を欠損値
 2. ハーカーの方法 (欠損値を $a_{ij} = w_i / w_j$ で補う) で, C.I. を求める.
 3. 元の A の C.I. と欠損値にした C.I. の改善の度合いを求める
 4. 改善の度合いが最も高い a_{ij} をやり直しの候補
- ▶ 両方法とも全体を見て, 不整合な一対比較値を指摘する方法である.

- ▶ 順位の決定 → おおよそのウエイトは決まってしまう.
- ▶ 理想点・満足点を考慮 → 別の対比較法
 1. 順位と満足点を指定
 2. 理想点（最高点），最低点，満足点間の対比較
 3. 他の要素は，上の3点のみと対比較（緩和な整合性制約を考慮）
 - ▶ 対比較は，ウエイトをより正確にするため．
 - ▶ 多数の要素の対比較が可能
 - ▶ 3. の対比較は，最高点，最低点に替えて，被験者がよく知っている要素に変更することも可能（この要素数も可変）
- ▶ 本アルゴリズム：緩和な整合性制約より厳しい制約
 - ▶ $A \succ B \succ (C \sim D)$ で， $a_{AC} \leq a_{AD}$ の場合
 - ▶ $a_{BD} \leq a_{AC}$ という制約もかかる．
 - ▶ これは， $a_{BD} \leq a_{AD}$ より厳しい制約